SNU 4190.210 프로그래밍 원리(Principles of Programming) Part I

Prof. Chung-Kil Hur

School of Computer Science & Engineering

차례

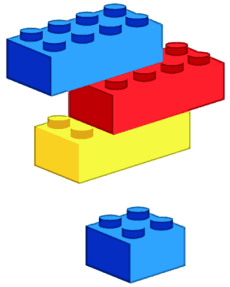
다음

프로그램 구성에 필요한 요소 (Elements of Programming)

- 기본부품(primitives)
- 조합하는 방법(means of constructing compound)
- 프로그램 실행과정의 이해(rule of evaluation)
- 타입으로 정리하는 방법(types)
- 속내용을 감추는 방법(means of abstraction)

기본부품의 반복된 조합 (Combination of Primitives)

(pictures from Google search)



Difference: programs can be executed

기본 부품(primitives)

기본적으로 제공됨. 상수(constant)라고도 불림.

type	elements	operators
$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$	`0, -1, 1.2, -1.2e2`	`+, *, /, =, <=,···`
$\mathbb{B}$	`#t, #f`	`and, or, not,···`
String	`"snow", "12@it"`	`substr, strconcat,···`
Symbol	`'snow, '12@it`	
Unit	`()`	

- Base types: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}$, String, Symbol
- 실행(evaluation, semantics): `-1.2e2` is -1.2×10^2, `#t` is true, `+` is $+$, `'snow` is a symbol named "snow", etc

식을 조합하는 방법 (Ways to Construct Programs)

P	::=	E	program
E	::=	c	constant
	|	x	name
	|	`(if` E E E`)`	conditional
	|	`(cons` E E`)`	pair
	|	`(car` E`)`	selection
	|	`(cdr` E`)`	selection
	|	`(lambda (`x^*`)` E`)`	function
	|	`(`E E^*`)`	application

- 재귀적(inductive, recursive):
  - One can compose infinitely many programs.
  - Arbitrary expressions can be plugged into an expression.
- When composing a program, one has to understand how the program will be evaluated (semantics).

프로그램 식의 실행과정 (Evaluation Process)

- 주어진 프로그램 식을 읽고(read)
- 그 식을 계산하고(evaluate)
  - 계산중에 컴퓨터 메모리와 시간을 소모 (consume time & memory)
  - 계산중에 입출력이 있으면 입출력을 수행 (input & output)
- 최종 계산 결과가 있으면 화면에 프린트한다(print)

주의:

- 식의 실행 규칙(rule of evaluation, semantics): clearly defined
- 프로그래머는 이것을 이해해야 의도한 프로그램을 작성할 수 있음 (programmer should understand the semantics)
- 제대로 실행될 수 없는(오류있는) 멀쩡한 식들이 많음 (Many well-formed programs are erroneous)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서 (Each case has its own rule):

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:
- (`car` E) 일때:
- (`cdr` E) 일때:
- (`lambda` (x^*) E) 일때:
- (E E^*) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님 (Well-formed programs may go wrong)
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야 (Well-typed programs do not go wrong)
- 이름의 사용 (use of names), 이름의 유효범위(scope)

프로그램식 조합방식의 원리 (Principle about Program Components

♣

모든 프로그래밍 언어에는 각 타입마다 그 타입의 값을 만드는 식과 사용하는 식을 구성하는 방법이 제공된다.
[For each type, there are ways to make values of the type (introduction) and ways to use them (elimination).]

이 원리를 확인해보면 (Let's check this principle)

타입 τ	만드는 식 (intro)	사용하는 식 (elim)
기본타입 ι	c	`+`, `*`, `=`, `and`, `substr`, etc
곱타입 $\tau \times \tau$	(`cons` E E)	(`car` E), (`cdr` E)
함수타입 $\tau \to \tau$	(`lambda` (x^*) E)	(E E^*)

다음

Naming (binding, declaration, definition)

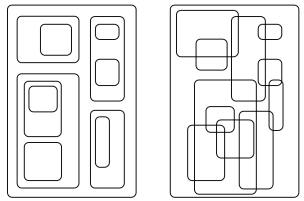
♣

이름 짓기는 속내용감추기(abstraction)의 첫 스텝: 이름을 지으면 지칭하는 대상(속내용) 대신에 그 이름을 사용 (Naming is a simple way of abstraction: One can hide details by giving it a name)

- 이름 지을 수 있는 대상 (those that can be named):
  - 프로그램에서 다룰 수 있는 모든 값 (all values)
- 이름의 유효범위가 한정됨 (The scope of a name is given). 따라서,
  - 이름 재사용 가능 (reuse a name)
  - 전체 프로그램의 모든 이름을 외울 필요없음 (do not need to know all names)
  - 이름이 필요한 곳에만 알려짐 (a name is defined only where it is needed)
- 이름의 유효범위는 쉽게 결정됨 (The scope of a name is easily determined)

이름의 유효범위 결정 (how to determine the scope)

프로그램 텍스트에서 쉽게 결정됨(lexical scoping) [The scope of a name is easily determined from the program text]



이런 간단한 유효범위는 수리논술의 2000년 전통 (The idea originates from Math):

Theorem The intersection of all addition-closed sets is addition-closed.
Proof Let S be the intersection set. Let x and y be elements of S. Because x and y are elements of ... hence in S.□

이름짓기(binding, declaration, definition)

- 식에서 이름짓기

E	::=	$\cdots$	예전것들
	|	`(let ((`x E`)`$^+$`)` E`)`	x의 정의
	|	`(letrec ((`x E`)`$^+$`)` E`)`	x의 재귀정의

- 프로그램에서 이름짓기

P	::=	E	계산식
	|	`(define` x E`)`* E	이름정의 후 계산식

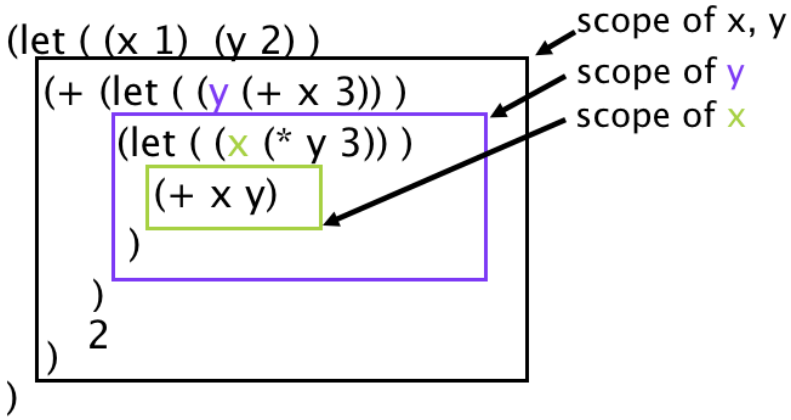
이름짓기의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

- (let $((x\ E))\ E$)
- (letrec $((x\ E))\ E$)
- (define $x\ E$) E

주의 (Note):

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님 (Well-formed programs may go wrong)
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야 (Well-typed programs do not go wrong)
- 이름의 유효범위(scope)
- 환경(environment): 이름과 그 대상(값)의 목록표 (table for names and their associated values)

이름의 유효범위(scope) 예



이름짓기 + 사용하기의 실행과정(semantics)

컴퓨터는 프로그램 식을 실행할 때 (When evaluating an expression)

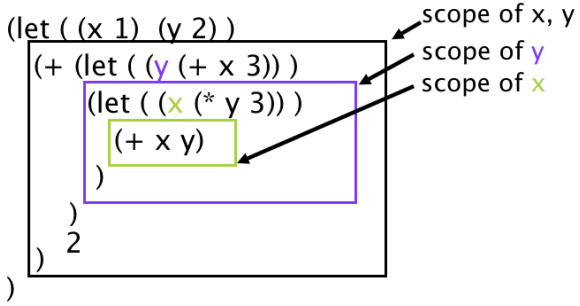
- 이름과 그 대상의 목록표를 관리 (managing a table for names and their associated values)
- 그러한 목록표를 환경이라고 함 (Such a table is called an environment)

a	1
b	2
env	(('a 1) ('b 2))
f	(lambda (x) (+ x 1))

이름짓기 + 사용하기의 실행과정(semantics)

환경 관리 (Managing environments)

- 환경 만들기: 이름이 지어지면 (Make an environment when names are defined)
- 환경 참조하기: 이름이 나타나면 (Use the environment when the names are used)
- 환경 폐기하기: 유효범위가 끝나면 (Delete the environment when the scope ends)



여러개 한꺼번에 이름짓기: 실행의미 (Multiple names at once)

- (let ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

설탕구조(syntactic sugar)

편리를 위해서 제공; 지금까지것들로 구성가능; 반드시 필요는 없다 (Just convinient notations for "expressions"):

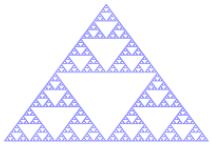
`list, cond, let, define`은 설탕

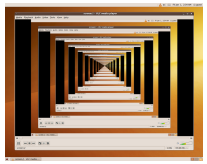
(list E^*)	=	(cons $\cdots$)
(cond (E E') (else E''))	=	(if $\cdots$)
(let ((x E)) E')	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)
(let ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)
(define x E) E'	=	(letrec $\cdots$)
(define x E) (define y E') E''	=	(letrec $\cdots$)
(define (f x) E)	=	(define $\cdots$)
(begin E E')	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)

다음

재귀(recursion): 되돌기, 같은 일의 반복

- 예) 재귀하고있는 그림들:





- 예) 재귀하고있는 표기법:

$$
\begin{array}{rcl}
E & ::= & c \\
& | & x \\
& | & \texttt{(if } E\ E\ E\texttt{)} \\
& | & \texttt{(cons } E\ E\texttt{)}
\end{array}
$$

- 예) 재귀하고있는 정의:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$X = 1 \hookrightarrow X$$

재귀함수(recursive function)의 정의

- 함수만 재귀적으로 정의가능 (대부분의 언어) (왜?) [Only functions can be defined recursively in most langs (why?)]

```
(define fac
        (lambda (n) (if (= n 0) 1
                        (* n (fac (- n 1))))
        ))
```

- 임의의 값을 재귀적으로 정의? 그 값 계산이 무한할 수 있음 (possible in Haskell) [Recursively defined data can be infinitely large]

```
(define x (+ 1 x))
(define K (cons 1 K))
(define Y (cons 1 (add1 Y)))
```

재귀함수의 실행과정

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

(fac 4)
⇒(* 4 (fac 3))
⇒(* 4 (* 3 (fac 2)))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (fac 1))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fac 0)))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 1)))
⇒(* 4 (* 3 2))
⇒(* 4 6)
⇒24

- 누적됨: 재귀호출을 마치고 계속해야 할 일들이
  - 함수호출때 호출 마치고 계속해야 할 일(continuation)을 기억해야
- 현대기술은 재귀호출때 누적 않되도록 자동변환
  - 끝재귀(tail recursion) 변환

끝재귀(tail recursion) 변환

```
(define (fac n)
        (if (= n 0) 1
            (* n (fac (- n 1)))
        ))

(define (fac n)
        (define (fac-aux m r)
            (if (= m 0) r
                (fac-aux (- m 1) (* m r))))
        (fac-aux n 1))
```


끝재귀함수(tail-recursive ftn)의 실행 과정

(fac 4)
⇒(fac-aux 4 1)
⇒(fac-aux 3 (* 4 1))
⇒(fac-aux 3 4)
⇒(fac-aux 2 (* 3 4))
⇒(fac-aux 2 12)
⇒(fac-aux 1 (* 2 12))
⇒(fac-aux 1 24)
⇒(fac-aux 0 (* 1 24))
⇒(fac-aux 0 24)
⇒24

- 할일을 (하고) 재귀호출 변수로 전달
- 재귀호출 마치고 할 일이 누적되지 않음

고차함수(higher-order function)

- 함수가 인자로

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \cdots + f(b)$$

- 함수가 결과로

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

현대 프로그래밍에서

- 모두 지원되는(Scala, Python, Lua, JavaScript, Clojure, Scheme, ML, C#, F#등)
- 과거에는 지원되지못했던

고차함수는 일상에서 흔하다

- 함수가 인자로
  - 요리사(함수)는 요리법(함수)과 재료를 받아서...
  - 댄서(함수)는 리듬있게움직이는법(함수)과 음악을 받아서...
  - 컴퓨터(함수)는 프로그램(함수)과 입력을 받아서...
- 함수가 결과로
  - 요리학교(함수)는 요리사(함수)를 만들어내고
  - 댄스동아리(함수)는 댄서(함수)를 만들어내고
  - 컴퓨터공장(함수)은 컴퓨터를(함수) 만들어내고

고차함수의 쓸모

고수준으로 일반화된 함수를 정의할 수 있다

```
(define (sigma lower upper)
  (lambda (f)
    (define (loop n)
      (if (> n upper) 0
        (+ (f n) (loop (+ n 1)))))
    (loop lower)
  ))

(define one-to-million (sigma 1 1000000))
(one-to-million (lambda (n) (* n n)))
(one-to-million (lambda (n) (+ n 2)))
```


고차함수의 쓸모

고수준으로 일반화된 함수를 정의할 수 있다

```
(define (sum lower upper f)
  (if (> lower upper) 0
    (+ (f lower) (sum (+ lower 1) upper f))
  ))

(define (generic-sum lower upper f larger base op inc)
  (if (larger lower upper) base
    (op (f lower)
      (generic-sum (inc lower) upper f larger base op inc))
  ))

(sum 1 10 (lambda (n) n))
(sum 10 100 (lambda (n) (+ n 1)))
(generic-sum 1 10 (lambda (n) n) > -1 + (lambda (n) (+ 2 n)))
(generic-sum "a" "z" (lambda (n) n) order "" concat alpha-next)
```


다음

타입(type)

♣

타입(type)은 프로그램이 계산하는 값들의 집합을 분류해서 요약하는 데 사용하는 "언어"이다. 타입으로 분류요약하는 방식은 대형 프로그램을 실수없이 구성하는 데 효과적이다.

Type is a "language" for describing a set of values that are used in programs. Abstracting a program as a type is an effective method to reduce errors in writing large programs.

- 타입(type)은 가이드다 [Type is a guide]
  - 프로그램의 실행안전성을 확인하는 [for removing runtime errors]
  - 새로운 종류의 데이터값을 구성하는 [for describing a new data structure]

사용하는 타입들(types)

τ	::=	ι	primitive type
	|	$\tau \times \tau$	pair(product) type
	|	$\tau + \tau$	or(sum) type
	|	$\tau \to \tau$	ftn type, single param
	|	$\tau * \cdots * \tau \to \tau$	ftn type, multi params
	|	$\top$	any type
	|	t	user-defined type's name
	|	$\tau\ t$	user-defined type's name, with param
ι	::=	*int* | *real* | *bool* | *string* | *symbol* | *unit*	

고차함수 타입 [higher-order types]

고차함수 타입 예:

$$int * int * (int \to int) \to int$$
$$(real \to real) \to (real \to real)$$
$$int * (int \to int) \to int$$
$$int \to (int \to int) \to int$$
$$int \times (int \to int) \to int$$
$$(int \to int) \to int\ list \to int$$
$$(int \to int) \times int\ list \to int$$
$$money \to (year \to car\ list)$$

타입을 상상하며 식을 구성하기 [write programs with types in mind]

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$) : τ'

타입을 상상하며 식을 구성하기 [write programs with types in mind]

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$) : τ'

타입을 상상하며 식을 구성하기 [write programs with types in mind]

- (let (($x_1{:}\tau_1$ $E_1{:}\tau_1$) ($x_2{:}\tau_2$ $E_2{:}\tau_2$)) $E{:}\tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1{:}\tau_1$ $E_1{:}\tau_1$) ($x_2{:}\tau_2$ $E_2{:}\tau_2$)) $E{:}\tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1{:}\tau_1$ $E_1{:}\tau_1$) (define $x_2{:}\tau_2$ $E_2{:}\tau_2$) $E{:}\tau$
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억

타입으로 프로그램을 정리/검산하기 [Validate a program using types]

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fac (- n 1)))
  ))

(define (fibonacci n)
   (cond ((= n 0) 0)
         ((= n 1) 1)
         (else (+ (fibonacci (- n 1))
                  (fibonacci (- n 2))))
   ))

(define (bar a b c)
  (if (= b 0) c
      (bar (+ a 1) (- b 1) (* a b))
  ))
```


타입으로 프로그램을 정리/검산하기 [Validate a program using types]

```
{= : int * int -> bool}
{* : int * int -> int}
{- : int * int -> int}

{(define (fac {n : int})
   {(if {(= {n : int} {0 : int}) : bool}
        {1 : int}
        {(* {n : int}
            {(fac {(- {n:int} {1:int}) : int}) : int}
         ) : int}
    ) : int}
 ) : int -> int}
```

Type checking rule for lists

$$\frac{}{\texttt{'()} : \tau\ \texttt{list}}$$

$$\frac{a : \tau \qquad l : \tau\ \texttt{list}}{(\texttt{cons}\ a\ l) : \tau\ \texttt{list}}$$

타입으로 프로그램을 정리/검산하기 [Validate a program using types]

```
(define (map-reduce f l op init)
   (reduce (map f l) op init))

 (define (map f l)
   (if (null? l) '()
     (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))
   ))

 (define (reduce l op init)
   (if (null? l) init
     (op (car l) (reduce (cdr l) op init))
   ))

 (define (word-count pages) (map-reduce wc pages + 0))
 (define (make-dictionary pages)
         (map-reduce mw (words pages) merge ()))
```


다음

계산복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

- 계산비용 [cost] = 시간과 메모리 [time & memory]
- 증가정도 [growth] = 입력 크기에 대한 함수로 [function on input size], 단
  - 관심: 입력이 커지면 결국 어떻게 될지(asymptotic complexity)
- "계산복잡도(complexity, order of growth)가 $\Theta(f(n))$ 이다"(n은 입력의 크기), 만일 그 복잡도가 $f(n)$으로 샌드위치될때 [if $f(n)$ satisfies the following]:

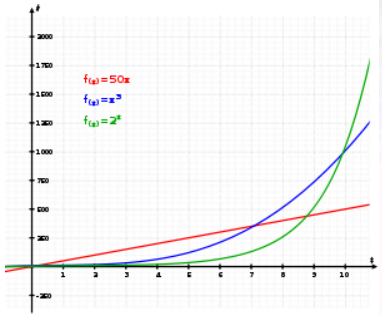
$$\begin{array}{ll} \Theta(f(n)): & k_1 \times f(n) \leq \bullet \leq k_2 \times f(n) \\ O(f(n)): & \bullet \leq k_2 \times f(n) \\ \Omega(f(n)): & k_1 \times f(n) \leq \bullet \end{array}$$

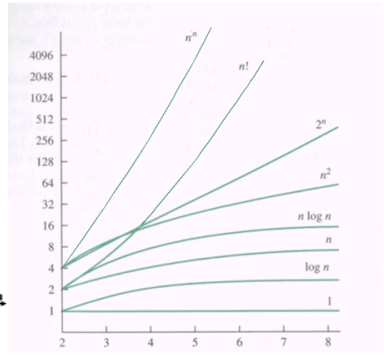
(k_1, k_2는 n과 무관한 양의 상수 [k_1, k_2 are fixed constants])

- n^2, $10000 \times n^2$, $3 \times n^2 + 10000 \times n$은 모두 $\Theta(n^2)$

계산복잡도(complexity)

(pictures from Google search)





계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도[time complexity] $\Theta(n)$, [space complexity]메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $O(n)$로 구현가능 [yes]
  - $O(\log n)$로 구현가능 [yes]
- `(SAT formula)`:
  - $O(2^n)$로 구현가능 [yes]
  - $O(poly(n))$로 구현가능? 누구도모름 [not known]
- `(diophantine eqn)`:
  - $O(2^n)$로 구현가능?
  - $O(n^n)$로 구현가능?
  - Is it decidable? not known until 1970, then "no"

다음

맞는 프로그램인지 확인하기 [program correctness]

프로그램을 돌리기전에(static analysis) [before execution]

- 분석검증 후 프로그램 제출/출시/탑재 [execute after static analysis]
- 다른 공학분야와 동일 [the same in other areas of engineering]:
  - 기계/전기/공정/건축설계 분석검증 후 제작/설비/건설 [build after analysis in mechanical/electrical/architecture enginering]
- 일상과 동일 [the same in our life]:
  - 입시/면접, 사주/궁합, 클럽기도
  - 검증 후 실행

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들 (properties to verify)

- 제대로 생겼는가? 자동검증 [well formed? automatic]
- 타입에 맞게 실행될 것인가? [well typed?]
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc) [manual]
  - 자동검증(ML, Scala, Haskell, Java, Python, etc) [automatic]
- 4190.210: 항상 끝나는가: 직접검증, 비교적 용이 [terminate?: manual, not so hard]
- 내가 바라는 계산을 하는가: 어려움 [fully correct?: very hard]
  My main research topic.
  You can learn some from the "Software Foundations" course that I will teach in 2015 Fall.

확인: 모든 입력에 대해서 정의되었는가? [does not crash?]

- 타입에 맞게 실행될 것이 확인된 경우 [just need to check whether the program is well typed]

We will learn more complex types for user-defined data structures later.

확인: 항상 끝나는가? [always terminate?]

그렇다, 만일 [If]:

- 반복 될 때 뭔가가 계속 "줄어들고" [something "decreases"]
- 그 줄어듬의 "끝이 있다"면 [the decreasing has an end].

즉, 재귀함수의 경우, 만일 [For example, in a recursive function, if]:

- 재귀 호출마다 인자가 "줄어들고" [an argument decreases at every recursive call]
- 그 줄어듬의 "끝이 있다"면 [the decreases has an end].

끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
    (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

- 음이아닌 정수만 입력으로 받는다면 [if $n \geq 0$],
- 재귀호출마다 원래 n보다 줄고 있고 "n-1" [$n - 1 < n$ at every recursive call],
- 끝이 있다("(= n 0) 1") [there is an end].

끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (fibonacci n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fibonacci (- n 1))
                 (fibonacci (- n 2))))
  ))
```


일반방법: 끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

아래와 같은 재귀함수 $f : A \to B$를 생각하자(w.l.o.g.)

(define (f x) $\cdots$(f e_1)$\cdots$(f e_2)$\cdots$)

재귀함수 인자들의 집합 A에서 [in the set A]

- 원소들 간의 줄어드는 순서 $>$를 찾으라, 아래와 같은 [find $>$ such that]:
- 재귀호출 인자식(e_1와 e_2)의 값이 원래 인자(x)보다 $>$인("줄어드는"), 그리고 [$x > e_1$ and $x > e_2$]
- 집합 A에서 $>$-순서대로 원소를 줄세우면 항상 유한한(well-founded) [$>$ has no infinite decreasing chain (*i.e.*, well-founded) in A].

끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (bar a b c)
  (if (= b 0) c
    (bar (+ a 1) (- b 1) (* a b))
  ))
```

- $\mathbb{N} * \mathbb{N} * \mathbb{N}$에서 줄어드는 순서 $>$는? [what is $>$?]
- 그래서 그 $>$-순서가 항상 유한번에 바닥에 닿는(well-founded)? [is $>$ well-founded?]

그런 순서 $>$는?

끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (map-reduce f l op init)
  (reduce (map f l) op init))

(define (map f l)
  (if (null? l) ()
    (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))
  ))

(define (reduce l op init)
  (if (null? l) init
    (op (car l) (reduce (cdr l) op init))
  ))

(define (word-count pages) (map-reduce wc pages + 0))
(define (make-dictionary pages) (map-reduce mw (words pages)
```

끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (sum lower upper f)
  (if (> lower upper) 0
    (+ (f lower) (sum (+ lower 1) upper f))
  ))
```


끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (sigma lower upper)
  (lambda (f)
    (define (loop n)
      (if (> n upper) 0
        (+ (f n) (loop (+ n 1)))))
    (loop upper)
  ))
```


끝나는 재귀함수인지 확인하기 [terminate?]

```
(define (ackermann m n)
(cond
  ((= m 0) (+ n 1))
  ((= n 0) (ackermann (- m 1) 1))
  (else (ackermann (- m 1) (ackermann m (- n 1))))
))
```