SNU 4190.210 프로그래밍 원리(Principles of Programming) Part I

Prof. Chung-Kil Hur

School of Computer Science & Engineering

차례

다음

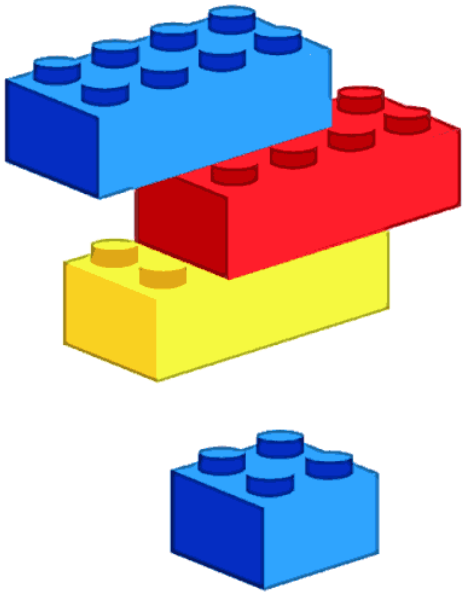
1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

프로그램 구성에 필요한 요소

- 기본부품(primitives)
- 조합하는 방법(means of constructing compound)
- 프로그램 실행과정의 이해(rule of evaluation)
- 타입으로 정리하는 방법(types)
- 속내용을 감추는 방법(means of abstraction)

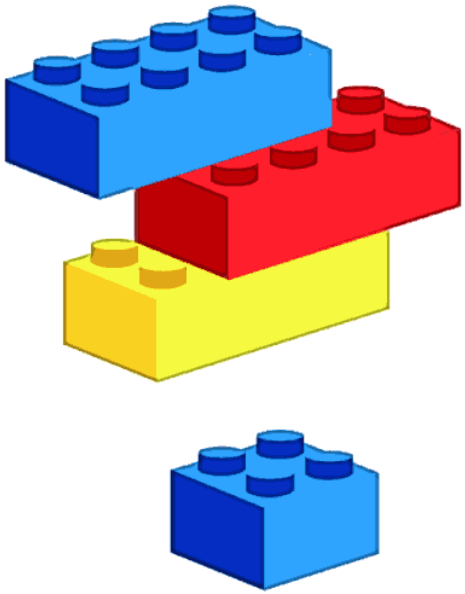
기본부품의 반복된 조합

(pictures from Google search)



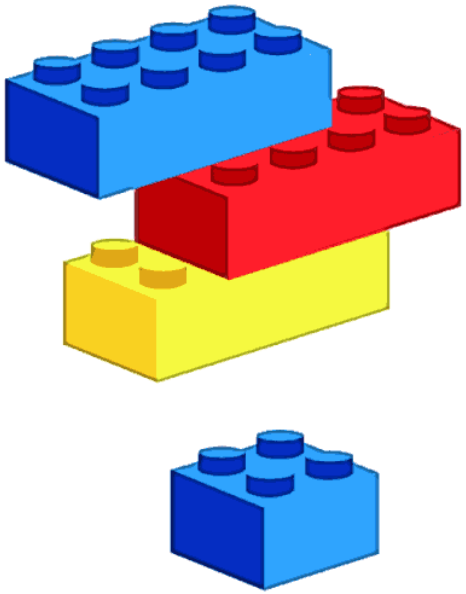
기본부품의 반복된 조합

(pictures from Google search)



기본부품의 반복된 조합

(pictures from Google search)



컴퓨터 프로그램이 다른 점: 만든 것이 실행(계산)된다

기본 부품(primitives)

기본적으로 제공됨. 상수(constant)라고도 불림.

type	elements	operators
$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	`0, -1, 1.2, -1.2e2`	`+, *, /, =, <=,···`
$\mathbb{B}$	`#t, #f`	`and, or, not,···`
String	`"snow", "12@it"`	`substr, strconcat,···`
Symbol	`'snow, '12@it`	`eq?`
Unit	`()`	

기본 부품(primitives)

기본적으로 제공됨. 상수(constant)라고도 불림.

type	elements	operators
$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$	`0, -1, 1.2, -1.2e2`	`+, *, /, =, <=,`$\cdots$
$\mathbb{B}$	`#t, #f`	`and, or, not,`$\cdots$
String	`"snow", "12@it"`	`substr, strconcat,`$\cdots$
Symbol	`'snow, '12@it`	`eq?`
Unit	`()`	

- 기본 타입들: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}$, String, Symbol
- 실행(evaluation, semantics): `-1.2e2`는 -1.2×10^2, `#t`는 참, `+`는 $+$, `'snow`는 "snow"라는 심볼, 등

식을 조합하는 방법

P	$::=$	E	program
E	$::=$	c	constant
	$\mid$	x	name
	$\mid$	(`if` E E E)	conditional
	$\mid$	(`cons` E E)	pair
	$\mid$	(`car` E)	selection
	$\mid$	(`cdr` E)	selection
	$\mid$	(`lambda` (x^*) E)	function
	$\mid$	(E E^*)	application

- 재귀적(inductive, recursive):
  - 만들 수 있는 식은 무한히 많음
  - 식안에 임의의 식들을 맘껏 조합할 수 있슴
- 조합식의 실행(semantics)은 어떻게 될까? 그 실행을 머릿속에 그려야.

프로그램 식의 실행과정

- 주어진 프로그램 식을 읽고(read)
- 그 식을 계산하고(evaluate)
  - 계산중에 컴퓨터 메모리와 시간을 소모
  - 계산중에 입출력이 있으면 입출력을 수행
- 최종 계산 결과가 있으면 화면에 프린트한다(print)

주의:

- 식의 실행 규칙(rule of evaluation, semantics): 명확히 정의됨
- 프로그래머는 이것을 이해해야 의도한 프로그램을 작성할 수 있슴
- 제대로 실행될 수 없는(오류있는) 멀쩡한 식들이 많음

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:
- (`car` E) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:
- (`car` E) 일때:
- (`cdr` E) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:
- (`car` E) 일때:
- (`cdr` E) 일때:
- (`lambda` (x^*) E) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

식의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

실행 규칙. 각 식의 종류에 따라서:

- c 일때:
- x 일때:
- (`if` E E E) 일때:
- (`cons` E E) 일때:
- (`car` E) 일때:
- (`cdr` E) 일때:
- (`lambda` (x^*) E) 일때:
- (E E^*) 일때:

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 사용, 이름의 유효범위(scope)

프로그램식 조합방식의 원리

♣

모든 프로그래밍 언어에는 각 타입마다 그 타입의 값을 만드는 식과 사용하는 식을 구성하는 방법이 제공된다.

이 원리를 확인해보면

타입 τ	만드는 식	사용하는 식
기본타입 ι	c	`+`, `*`, `=`, `and`, `substr`, `etc`
곱타입 $\tau \times \tau$	(`cons` E E)	(`car` E), (`cdr` E)
함수타입 $\tau \to \tau$	(`lambda` (x^*) E)	(E E^*)

다음

1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

이름짓기(binding, declaration, definition)

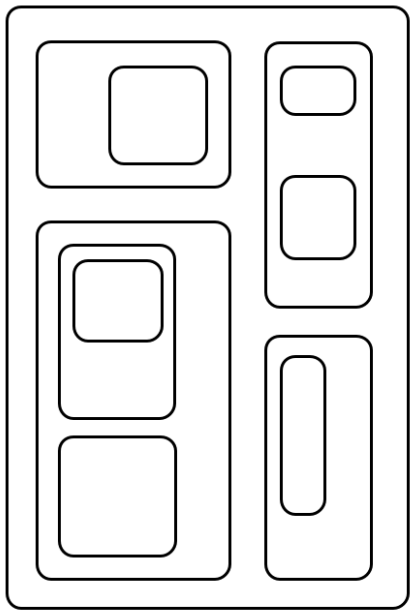
♣

이름 짓기는 속내용감추기(abstraction)의 첫 스텝: 이름을 지으면 지칭하는 대상(속내용) 대신에 그 이름을 사용

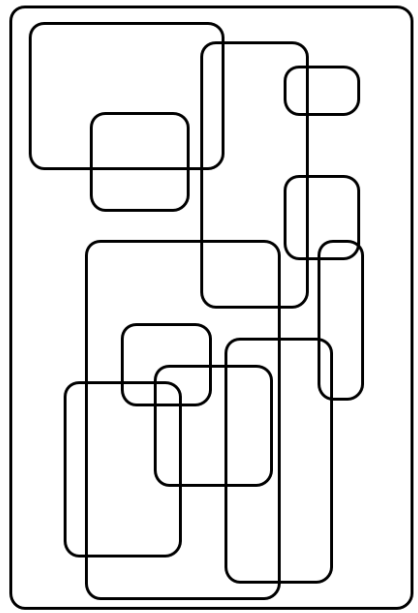
- 이름 지을 수 있는 대상:
  - 프로그램에서 다룰 수 있는 모든 값
- 이름의 유효범위(scope)가 한정됨. 따라서,
  - 이름 재사용 가능
  - 전체 프로그램의 모든 이름을 외울 필요없슴
  - 이름이 필요한 곳에만 알려짐
- 이름의 유효범위(scope)는 쉽게 결정됨

이름의 유효범위(scope) 결정

프로그램 텍스트에서 쉽게 결정됨(lexical scoping)



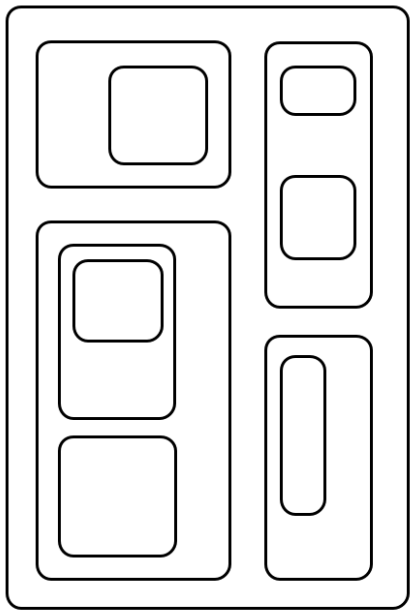
YES



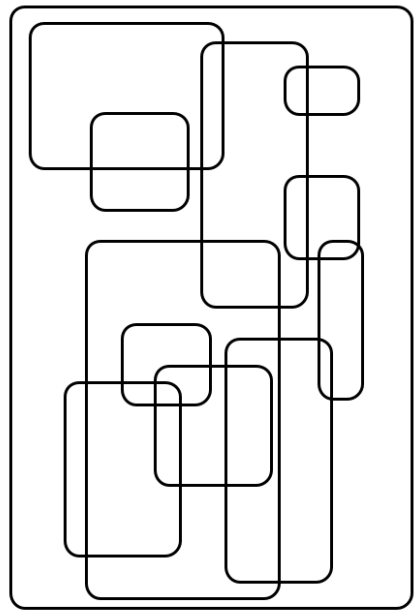
No

이름의 유효범위(scope) 결정

프로그램 텍스트에서 쉽게 결정됨(lexical scoping)



YES



No

이런 간단한 유효범위는 수리논술의 2000년 전통:

Theorem The intersection of all addition-closed sets is addition-closed.

Proof Let S be the intersection set. Let x and y be elements of S. Because x and y are elements of ... hence in S.□

이름짓기(binding, declaration, definition)

- 식에서 이름짓기

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & \cdots & \text{예전것들} \\
 & | & \texttt{(let ((}x\ E\texttt{)}^{+}\texttt{)}\ E\texttt{)} & x\text{의 정의} \\
 & | & \texttt{(letrec ((}x\ E\texttt{)}^{+}\texttt{)}\ E\texttt{)} & x\text{의 재귀정의}
\end{array}
$$

- 프로그램에서 이름짓기

$$
\begin{array}{rcll}
P & ::= & E & \text{계산식} \\
 & | & \texttt{(define}\ x\ E\texttt{)}^{*}\ E & \text{이름정의 후 계산식}
\end{array}
$$

이름짓기의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 유효범위(scope)
- 환경(environment): 이름과 그 대상(값)의 목록표

이름짓기의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

- (let $((x\ E))\ E$)

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 유효범위(scope)
- 환경(environment): 이름과 그 대상(값)의 목록표

이름짓기의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

- (let $((x\ E))\ E$)
- (letrec $((x\ E))\ E$)

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 유효범위(scope)
- 환경(environment): 이름과 그 대상(값)의 목록표

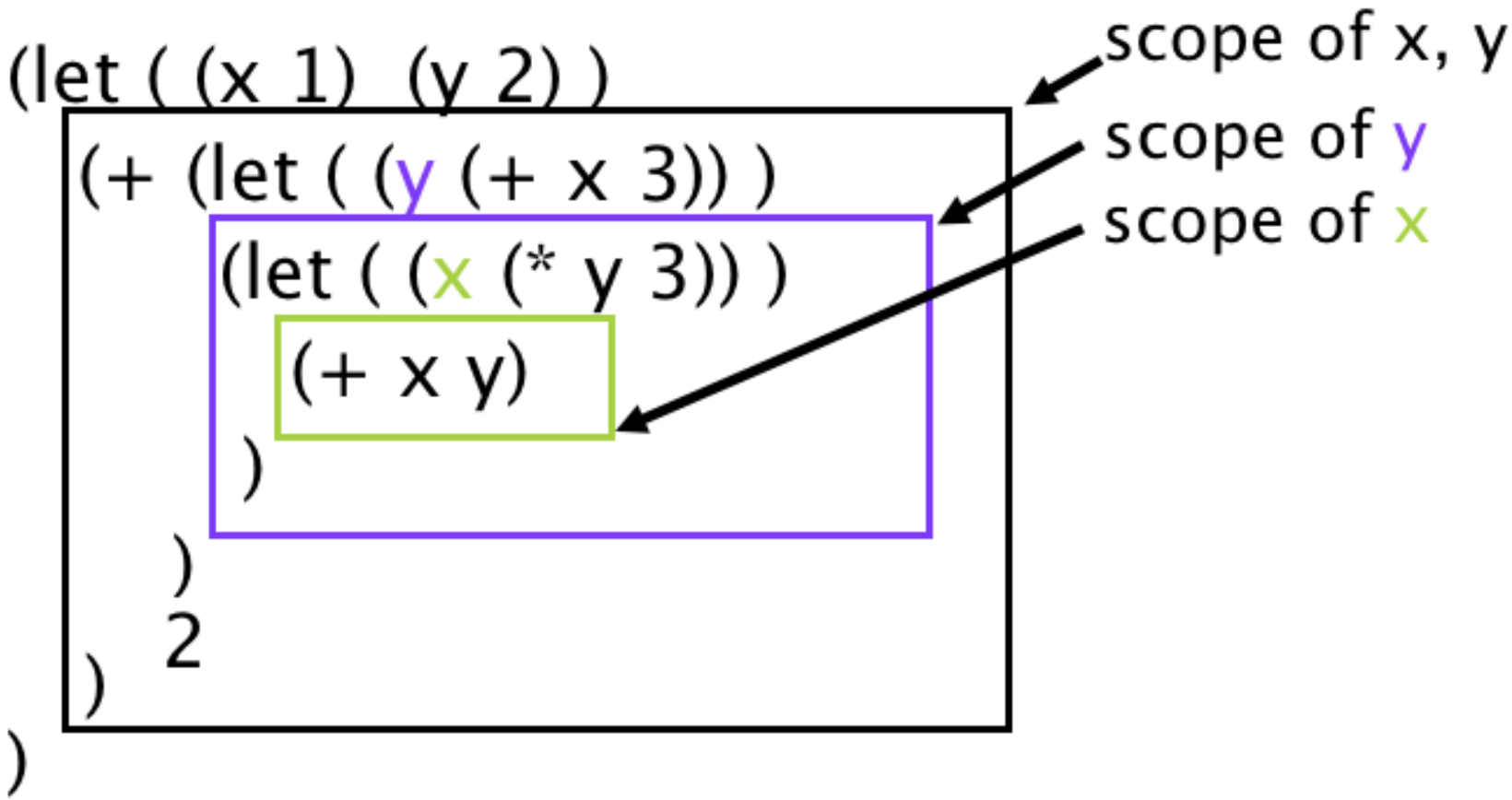
이름짓기의 실행규칙(rule of evaluation, semantics)

- (let $((x\ E))\ E$)
- (letrec $((x\ E))\ E$)
- (define $x\ E$) E

주의:

- 생긴게 옳다고 모두 제대로 실행되는 게 아님
- 부품식들의 계산결과의 타입이 맞아야
- 이름의 유효범위(scope)
- 환경(environment): 이름과 그 대상(값)의 목록표

이름의 유효범위(scope) 예



이름짓기 + 사용하기의 실행과정(semantics)

컴퓨터는 프로그램 식을 실행할 때

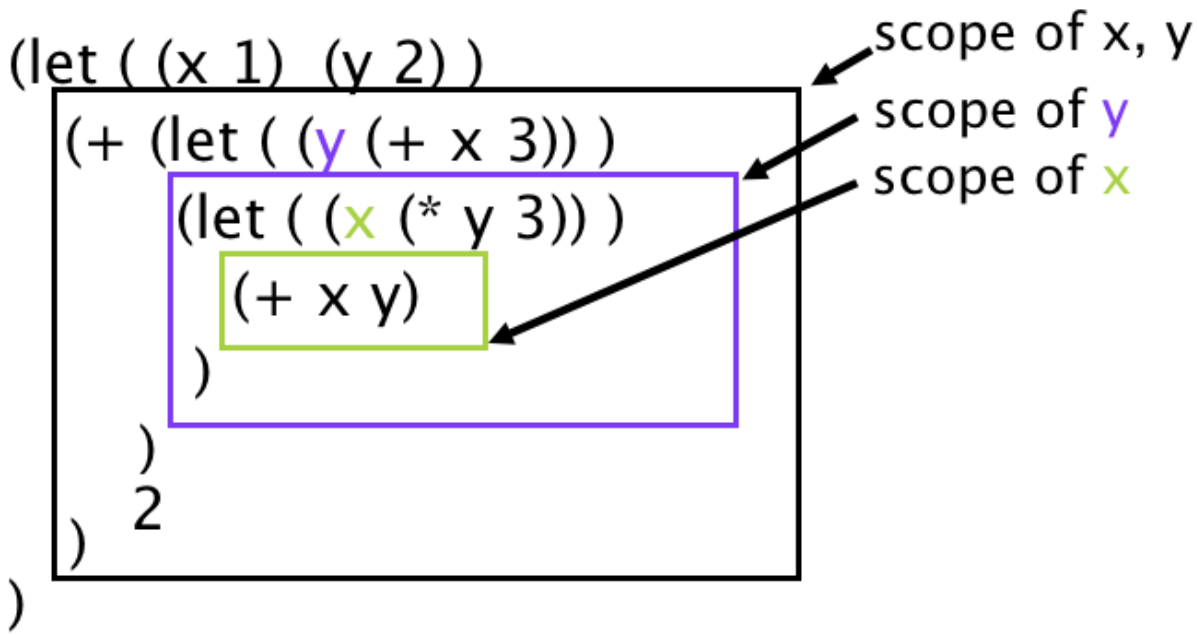
- 이름과 그 대상의 목록표를 관리
- 그러한 목록표를 환경(environment)이라고 함

a	1
b	2
env	(('a 1) ('b 2))
f	(lambda (x) (+ x 1))

이름짓기 + 사용하기의 실행과정(semantics)

환경(environment) 관리

- 환경 만들기: 이름이 지어지면
- 환경 참조하기: 이름이 나타나면
- 환경 폐기하기: 유효범위가 끝나면



여러개 한꺼번에 이름짓기: 실행의미

- (let ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

설탕구조(syntactic sugar)

편리를 위해서 제공; 지금까지것들로 구성가능; 반드시 필요는 없다:

`list`, `cond`, `let`, `define`은 설탕

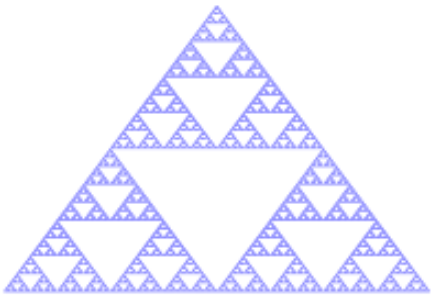
(list E^*)	=	(cons $\cdots$)
(cond (E E') (else E''))	=	(if $\cdots$)
(let ((x E)) E')	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)
(let ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)
(define x E) E'	=	(letrec $\cdots$)
(define x E) (define y E') E''	=	(letrec $\cdots$)
(define (f x) E)	=	(define $\cdots$)
(begin E E')	=	((lambda $\cdots$) $\cdots$)

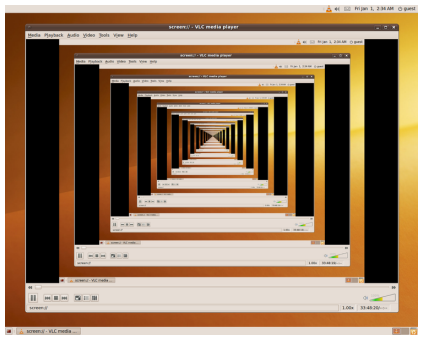
다음

1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

재귀(recursion): 되돌기, 같은 일의 반복

- 예) 재귀하고있는 그림들:





- 예) 재귀하고있는 표기법:

$$
\begin{array}{rcl}
E & ::= & c \\
& | & x \\
& | & (\texttt{if}\ E\ E\ E) \\
& | & (\texttt{cons}\ E\ E)
\end{array}
$$

- 예) 재귀하고있는 정의:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$X = 1 \hookrightarrow X$$

재귀함수(recursive function)의 정의

- 함수만 재귀적으로 정의가능 (대부분의 언어) (왜?)

```
(define fac
        (lambda (n) (if (= n 0) 1
                        (* n (fac (- n 1))))
        ))
```

- 임의의 값을 재귀적으로 정의? 그 값 계산이 무한할 수 있슴

```
(define x (+ 1 x))
(define K (cons 1 K))
(define Y (cons 1 (add1 Y)))
```

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

-	(let ((x (+ 1 1)) (y (- 2 1)))
	  (let ((fact (letrec ((fac LAM)
	  (x (fac 0)))
	  fac)))
	  (+ (fact x) (- y 1))))

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

-	(let ((x •) (y (- 2 1)))
	  (let ((fact (letrec ((fac LAM)
	  (x (fac 0)))
	  fac)))
	  (+ (fact x) (- y 1))))

-	(+ 1 1)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

-	(let ((x 2) (y (- 2 1)))
	  (let ((fact (letrec ((fac LAM)
	  (x (fac 0)))
	  fac)))
	  (+ (fact x) (- y 1))))

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

-	(let ((x 2) (y •))
	  (let ((fact (letrec ((fac LAM)
	  (x (fac 0)))
	  fac)))
	  (+ (fact x) (- y 1))))

-	(- 2 1)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

-	(let ((x 2) (y 1))
	  (let ((fact (letrec ((fac LAM)
	  (x (fac 0)))
	  fac)))
	  (+ (fact x) (- y 1))))

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	–
x	2
y	1

E0	(let ((fact (letrec ((fac LAM) (x (fac 0))) fac))) (+ (fact x) (- y 1)))

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0		–
x	2	
y	1	

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E0	(letrec ((fac LAM) (x (fac 0))) fac)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
	(let ((fact •))
	(+ (fact x) (- y 1)))

E1	
	(letrec ((fac LAM)
	(x (fac 0)))
	fac)

E0	–
x	2
y	1

E1	E0
fac	–
x	–

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
x	2
y	1

E1	E0
fac	-
x	-

E0	
	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	
	(letrec ((fac LAM) (x (fac 0))) fac)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
x	2
y	1

E1	E0
fac	-
x	-

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((fac •) (x (fac 0))) fac)

E1	LAM

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
x	2
y	1

E1	E0
fac	-
x	-

E0	
	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	
	(letrec ((fac (LAM,E1)) (x (fac 0))) fac)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	-

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((x (fac 0)) fac)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	-

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((x •)) fac)

E1	(fac 0)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((x •)) fac)

E1	•

E2	(if (= n 0) y (if (= n 1) x (* n (fac (- n 1)))))

E0	–
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	–

E2	E1
n	0

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((x •)) fac)

E1	1

E0	–
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	–

E2	E1
n	0

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	(letrec ((x 1)) fac)

E0	–
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	–

E2	E1
n	0

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	(let ((fact •)) (+ (fact x) (- y 1)))

E1	fac

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E0	(let ((fact (LAM,E1))) (+ (fact x) (- y 1)))

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E3	
	(+ (fact x) (- y 1))

E0	–
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

E3	E0
fact	(LAM,E1)

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E3	(+ ● (- y 1))

E4	(if (= n 0) y (if (= n 1) x (* n (fac (- n 1)))))

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

E3	E0
fact	(LAM,E1)

E4	E1
n	2

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E3	(+ ● (- y 1))
E4	(if (= n 0) y (if (= n 1) x (* n ●)))
E5	(if (= n 0) y (if (= n 1) x (* n (fac (- n 1)))))

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

E3	E0
fact	(LAM,E1)

E4	E1
n	2

E5	E1
n	1

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E3	(+ ● (- y 1))

E4	(if (= n 0) y (if (= n 1) x (* n 1)))

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

E3	E0
fact	(LAM,E1)

E4	E1
n	2

E5	E1
n	1

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

E3	(+ 2 (- y 1))

E0	-
x	2
y	1

E1	E0
fac	(LAM,E1)
x	1

E2	E1
n	0

E3	E0
fact	(LAM,E1)

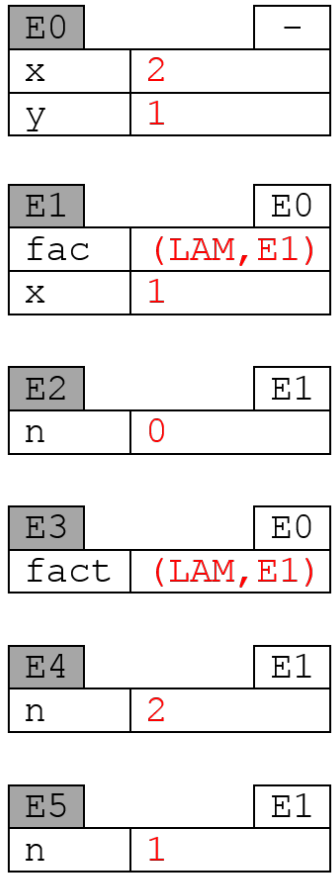
E4	E1
n	2

E5	E1
n	1

예제: 실행의미, Closure로 엄밀하게

```
LAM := (lambda (n) (if (= n 0) y
                       (if (= n 1) x
                                   (* n (fac (- n 1))))))
```

2



재귀함수의 실행과정

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

```
(fac 4)
⇒(* 4 (fac 3))
⇒(* 4 (* 3 (fac 2)))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (fac 1))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fac 0)))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
⇒(* 4 (* 3 (* 2 1)))
⇒(* 4 (* 3 2))
⇒(* 4 6)
⇒24
```

- 누적됨: 재귀호출을 마치고 계속해야 할 일들이
  - 함수호출때 호출 마치고 계속해야 할 일(continuation)을 기억해야
- 현대기술은 재귀호출때 누적 않되도록 자동변환
  - 끝재귀(tail recursion) 변환

끝재귀(tail recursion) 변환

```
(define (fac n)
        (if (= n 0) 1
            (* n (fac (- n 1)))
        ))

(define (fac n)
        (define (fac-aux m r)
            (if (= m 0) r
                (fac-aux (- m 1) (* m r))))
        (fac-aux n 1))
```

끝재귀함수(tail-recursive ftn)의 실행 과정

(fac 4)
⇒(fac-aux 4 1)
⇒(fac-aux 3 (* 4 1))
⇒(fac-aux 3 4)
⇒(fac-aux 2 (* 3 4))
⇒(fac-aux 2 12)
⇒(fac-aux 1 (* 2 12))
⇒(fac-aux 1 24)
⇒(fac-aux 0 (* 1 24))
⇒(fac-aux 0 24)
⇒24

- 할일을 (하고) 재귀호출 변수로 전달
- 재귀호출 마치고 할 일이 누적되지 않음

고차함수(higher-order function)

- 함수가 인자로

$$\int_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \cdots + f(b)$$

- 함수가 결과로

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

현대 프로그래밍에서

- 모두 지원되는(Scala, Python, Lua, JavaScript, Clojure, Scheme, ML, C#, F#등)
- 과거에는 지원되지못했던

고차함수는 일상에서 흔하다

- 함수가 인자로
  - 요리사(함수)는 요리법(함수)과 재료를 받아서...
  - 댄서(함수)는 리듬있게움직이는법(함수)과 음악을 받아서...
  - 컴퓨터(함수)는 프로그램(함수)과 입력을 받아서...
- 함수가 결과로
  - 요리학교(함수)는 요리사(함수)를 만들어내고
  - 댄스동아리(함수)는 댄서(함수)를 만들어내고
  - 컴퓨터공장(함수)은 컴퓨터를(함수) 만들어내고

고차함수의 쓸모

고수준으로 일반화된 함수를 정의할 수 있다

```
(define (sigma lower upper)
  (lambda (f)
    (define (loop n)
      (if (> n upper) 0
        (+ (f n) (loop (+ n 1)))))
    (loop lower)
  ))

(define one-to-million (sigma 1 1000000))
(one-to-million (lambda (n) (* n n)))
(one-to-million (lambda (n) (+ n 2)))
```

고차함수의 쓸모

고수준으로 일반화된 함수를 정의할 수 있다

```
(define (sum lower upper f)
  (if (> lower upper) 0
    (+ (f lower) (sum (+ lower 1) upper f))
  ))

(define (generic-sum lower upper f larger base op inc)
  (if (larger lower upper) base
    (op (f lower)
      (generic-sum (inc lower) upper f larger base op in
  ))

(sum 1 10 (lambda (n) n))
(sum 10 100 (lambda (n) (+ n 1)))
(generic-sum 1 10 (lambda (n) n) > -1 + (lambda (n) (+ 2 n)
(generic-sum "a" "z" (lambda (n) n) order "" concat alpha-n
```

다음

1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

타입(type)

♣

타입(type)은 프로그램이 계산하는 값들의 집합을 분류해서 요약하는 데 사용하는 "언어"이다. 타입으로 분류요약하는 방식은 대형 프로그램을 실수없이 구성하는 데 효과적이다.

- 타입(type)은 가이드다
  - 프로그램의 실행안전성을 확인하는
  - 새로운 종류의 데이터값을 구성하는

사용하는 타입들(types)

τ	$::=$	ι	primitive type
	$\mid$	$\tau \times \tau$	pair(product) type
	$\mid$	$\tau + \tau$	or(sum) type
	$\mid$	$\tau \rightarrow \tau$	ftn type, single param
	$\mid$	$\tau * \cdots * \tau \rightarrow \tau$	ftn type, multi params
	$\mid$	$\top$	any type
	$\mid$	t	user-defined type's name
	$\mid$	$\tau\ t$	user-defined type's name, with param
ι	$::=$	*int* $\mid$ *real* $\mid$ *bool* $\mid$ *string* $\mid$ *symbol* $\mid$ *unit*	

고차함수 타입

고차함수 타입 예:

$$
\begin{array}{l}
int * int * (int \to int) \to int \\
(real \to real) \to (real \to real) \\
int * (int \to int) \to int \\
int \to (int \to int) \to int \\
int \times (int \to int) \to int \\
(int \to int) \to int\ list \to int \\
(int \to int) \times int\ list \to int \\
money \to (year \to car\ list)
\end{array}
$$

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E E' E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E' E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ)
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ) : τ
- (lambda (x:τ) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ) : τ
- (lambda (x:τ) E:τ') : $\tau \rightarrow \tau'$

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \rightarrow \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$)
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$)
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$) : τ'

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E E' E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E' E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'')
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ)
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda (x) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ) : τ
- (lambda (x:τ) E)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$)

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if E:$\mathbb{B}$ E':τ E'':τ) : τ
- (lambda (x:τ) E:τ') : $\tau \rightarrow \tau'$

- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \rightarrow \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- (E E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ E')
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$)
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons E E')
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$)
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car E)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$)
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr E)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$)

타입을 상상하며 식을 구성하기

- $c : \iota$
- $x : \tau$
- (if $E{:}\mathbb{B}$ $E'{:}\tau$ $E''{:}\tau$) : τ
- (lambda ($x{:}\tau$) $E{:}\tau'$) : $\tau \to \tau'$
  - $x : \tau$임을 E를 구성할 때 기억
- ($E{:}\tau' \to \tau$ $E'{:}\tau'$) : τ
- (cons $E{:}\tau$ $E'{:}\tau'$) : $\tau \times \tau'$
- (car $E{:}\tau \times \tau'$) : τ
- (cdr $E{:}\tau \times \tau'$) : τ'

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ E_1) (x_2 E_2)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (x_2 E_2)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let ((x1 : τ1 E1 : τ1) (x2 : τ2 E2)) E)
- (letrec ((x1 E1) (x2 E2)) E)
- (define x1 E1) (define x2 E2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) E)
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let ((`x1`:`τ1` `E1`:`τ1`) (`x2`:`τ2` `E2`:`τ2`)) `E`:`τ`)
- (letrec ((`x1` `E1`) (`x2` `E2`)) `E`)
- (define `x1` `E1`) (define `x2` `E2`) `E`

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec ((x_1 E_1) (x_2 E_2)) E)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ E_1) (x_2 E_2)) E)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (x_2 E_2)) E)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ E_2)) E)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) E)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)

- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define x_1 E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ E_1) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (define x_2 E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (define $x_2 : \tau_2$ E_2) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (define $x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$) E

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (define $x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$) $E : \tau$

타입을 상상하며 식을 구성하기

- (let (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E를 구성할 때 기억
- (letrec (($x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) ($x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$)) $E : \tau$)
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억
- (define $x_1 : \tau_1$ $E_1 : \tau_1$) (define $x_2 : \tau_2$ $E_2 : \tau_2$) $E : \tau$
  - $x_1 : \tau_1$이고 $x_2 : \tau_2$임을 E_1, E_2, E를 구성할 때 기억

타입으로 프로그램을 정리/검산하기

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fac (- n 1)))
  ))

(define (fibonacci n)
   (cond ((= n 0) 0)
         ((= n 1) 1)
         (else (+ (fibonacci (- n 1))
                  (fibonacci (- n 2))))
   ))

(define (bar a b c)
  (if (= b 0) c
      (bar (+ a 1) (- b 1) (* a b))
  ))
```

타입으로 프로그램을 정리/검산하기

```
(define (map-reduce f l op init)
   (reduce (map f l) op init))

(define (map f l)
  (if (null? l) ()
    (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))
  ))

(define (reduce l op init)
  (if (null? l) init
    (op (car l) (reduce (cdr l) op init))
  ))

(define (word-count pages) (map-reduce wc pages + 0))
(define (make-dictionary pages) (map-reduce mw (words
```

다음

1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

계산 복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

계산 복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

- 계산비용 = 시간과 메모리

계산 복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

- 계산비용 = 시간과 메모리
- 증가정도 = 입력 크기에 대한 함수로, 단
  - 관심: 입력이 커지면 결국 어떻게 될지(asymptotic complexity)

계산 복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

- 계산비용 = 시간과 메모리
- 증가정도 = 입력 크기에 대한 함수로, 단
  - 관심: 입력이 커지면 결국 어떻게 될지(asymptotic complexity)
- "계산복잡도(complexity, order of growth)가 $\Theta(f(n))$이다"(n은 입력의 크기), 만일 그 복잡도가 $f(n)$으로 샌드위치될때:

$$k_1 \times f(n) \leq \bullet \leq k_2 \times f(n)$$

(k_1, k_2는 n과 무관한 양의 상수)

계산 복잡도(complexity)

프로그램 실행 비용의 증가정도(order of growth)

- 계산비용 = 시간과 메모리
- 증가정도 = 입력 크기에 대한 함수로, 단
  - 관심: 입력이 커지면 결국 어떻게 될지(asymptotic complexity)
- "계산복잡도(complexity, order of growth)가 $\Theta(f(n))$이다"(n은 입력의 크기), 만일 그 복잡도가 $f(n)$으로 샌드위치될때:

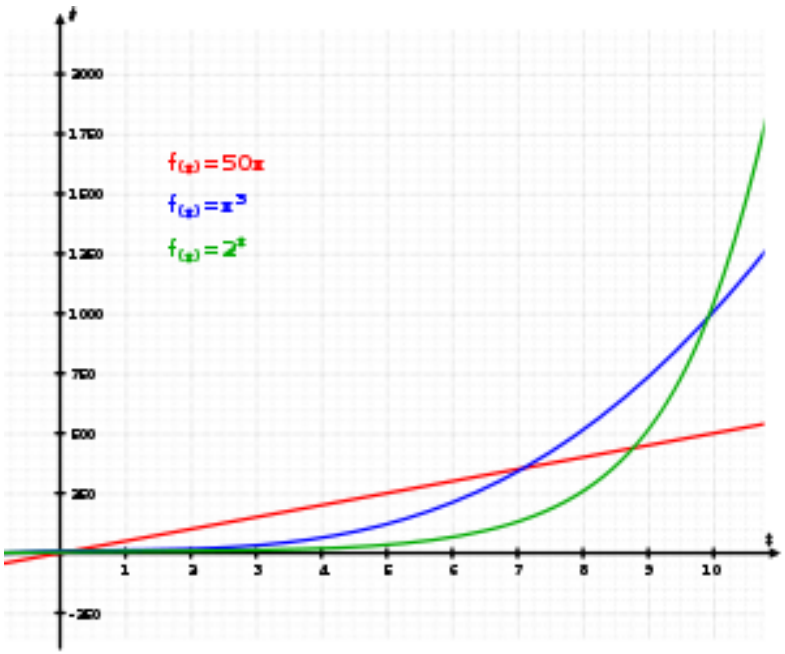
$$k_1 \times f(n) \leq \bullet \leq k_2 \times f(n)$$

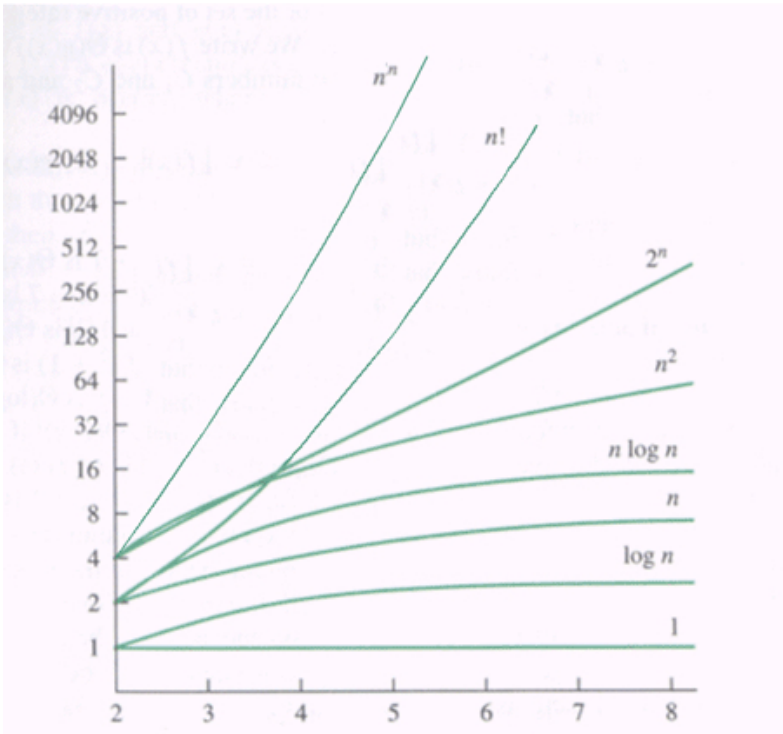
(k_1, k_2는 n과 무관한 양의 상수)

- n^2, $10000 \times n^2$, $3 \times n^2 + 10000 \times n$은 모두 $\Theta(n^2)$

계산복잡도(complexity)

(pictures from Google search)





계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:

- `(sat formula)`:

- `(diophantine eqn)`:

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:
- `(diophantine eqn)`:

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
  - $\Theta(\log n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:

- `(diophantine eqn)`:

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
  - $\Theta(\log n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능

- `(diophantine eqn)`:

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
  - $\Theta(\log n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능
  - $\Theta(\mathit{poly}(n))$로 구현가능? 누구도모름
- `(diophantine eqn)`:

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
  - $\Theta(\log n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능
  - $\Theta(\mathit{poly}(n))$로 구현가능? 누구도모름
- `(diophantine eqn)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능? 누구도모름

계산복잡도(complexity)

- `(fac n)`: 시간복잡도 $\Theta(n)$, 메모리복잡도 $\Theta(n)$.
- `(exp b n)`:
  - $\Theta(n)$로 구현가능
  - $\Theta(\log n)$로 구현가능
- `(sat formula)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능
  - $\Theta(\mathit{poly}(n))$로 구현가능? 누구도모름
- `(diophantine eqn)`:
  - $\Theta(2^n)$로 구현가능? 누구도모름
  - $\Theta(n^n)$로 구현가능? 누구도모름

다음

1. 프로그래밍 기본부품과 조합 (elements & compound)
2. 이름짓기 (binding, delclaration, definition)
3. 재귀와 고차함수 (recursion & higher-order functions)
4. 타입으로 정리하기 (types & typeful programming)
5. 프로그램의 계산 복잡도 (program complexity)
6. 맞는 프로그램인지 확인하기 (program correctness)

맞는 프로그램인지 확인하기

프로그램을 돌리기전에(static test)

- 분석검증 후 프로그램 제출/출시/탑재
- 다른 공학분야와 동일:
  - 기계/전기/공정/건축설계 분석검증 후 제작/설비/건설
- 일상과 동일:
  - 입시/면접, 사주/궁합, 클럽기도
  - 검증 후 실행

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc)

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc)
  - 자동검증(ML, Scala, Haskell, Java, Python, etc)

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc)
  - 자동검증(ML, Scala, Haskell, Java, Python, etc)
- 4190.210: 모든 입력에 대해서 정의되었는가?
  직접검증, 용이

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc)
  - 자동검증(ML, Scala, Haskell, Java, Python, etc)
- 4190.210: 모든 입력에 대해서 정의되었는가? 직접검증, 용이
- 4190.210: 항상 끝나는가: 직접검증, 비교적 용이

4190.210에서는 간단한 기술만

검증해야 할 성질들

- 제대로 생겼는가? 자동검증
- 타입에 맞게 실행될 것인가?
  - 직접검증(Scheme, C, JavaScript, etc)
  - 자동검증(ML, Scala, Haskell, Java, Python, etc)
- 4190.210: 모든 입력에 대해서 정의되었는가? 직접검증, 용이
- 4190.210: 항상 끝나는가: 직접검증, 비교적 용이
- 내가 바라는 계산을 하는가: 어려움

확인: 모든 입력에 대해서 정의되었는가?

- 타입에 맞게 실행될 것이 확인된 경우
- 타입에 맞게 실행될 것이 확인안된 경우

데이터 구현을 익히고 나서.

확인: 항상 끝나는가?

그렇다, 만일:

- 반복 될 때 뭔가가 계속 "줄어들고"
- 그 줄어듬의 "끝이 있다"면.

즉, 재귀함수의 경우, 만일:

- 재귀 호출마다 인자가 "줄어들고"
- 그 줄어듬의 "끝이 있다"면.

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
    (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
    (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

- 음이아닌 정수만 입력으로 받는다면,

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
    (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

- 음이아닌 정수만 입력으로 받는다면,
- 재귀호출마다 원래 n보다 줄고 있고 "n-1",

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (fac n)
  (if (= n 0) 1
    (* n (fac (- n 1)))
  ))
```

- 음이아닌 정수만 입력으로 받는다면,
- 재귀호출마다 원래 n보다 줄고 있고 "n-1",
- 끝이 있다("(= n 0) 1").

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (fibonacci n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fibonacci (- n 1))
                 (fibonacci (- n 2))))
  ))
```

일반방법: 끝나는 재귀함수인지 확인하기

아래와 같은 재귀함수 $f : A \to B$를 생각하자(w.l.o.g.)

$$\texttt{(define (f } x\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_1\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_2\texttt{)} \cdots \texttt{)}$$

재귀함수 인자들의 집합 A에서

일반방법: 끝나는 재귀함수인지 확인하기

아래와 같은 재귀함수 $f : A \to B$를 생각하자(w.l.o.g.)

$$\texttt{(define (f } x\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_1\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_2\texttt{)} \cdots \texttt{)}$$

재귀함수 인자들의 집합 A에서

- 원소들 간의 줄어드는 순서 $>$를 찾으라, 아래와 같은:

일반방법: 끝나는 재귀함수인지 확인하기

아래와 같은 재귀함수 $f : A \to B$를 생각하자(w.l.o.g.)

$$\texttt{(define (f } x\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_1\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_2\texttt{)} \cdots \texttt{)}$$

재귀함수 인자들의 집합 A에서

- 원소들 간의 줄어드는 순서 $>$를 찾으라, 아래와 같은:
- 재귀호출 인자식(e_1와 e_2)의 값이 원래 인자(x)보다 $>$인("줄어드는"), 그리고

일반방법: 끝나는 재귀함수인지 확인하기

아래와 같은 재귀함수 $f : A \to B$를 생각하자(w.l.o.g.)

$$\texttt{(define (f } x\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_1\texttt{)} \cdots \texttt{(f } e_2\texttt{)} \cdots \texttt{)}$$

재귀함수 인자들의 집합 A에서

- 원소들 간의 줄어드는 순서 $>$를 찾으라, 아래와 같은:
- 재귀호출 인자식(e_1와 e_2)의 값이 원래 인자(x)보다 $>$인("줄어드는"), 그리고
- 집합 A에서 $>$-순서대로 원소를 줄세우면 항상 유한한(finitely well-founded).

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (bar a b c)
  (if (= b 0) c
    (bar (+ a 1) (- b 1) (* a b))
  ))
```

- $\mathbb{N} * \mathbb{N} * \mathbb{N}$에서 줄어드는 순서 $>$는?
- 그래서 그 $>$-순서가 항상 유한번에 바닥에 닿는(finitely well-founded)?

그런 순서 $>$는?

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (map-reduce f l op init)
  (reduce (map f l) op init))

(define (map f l)
  (if (null? l) ()
    (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))
  ))

(define (reduce l op init)
  (if (null? l) init
    (op (car l) (reduce (cdr l) op init))
  ))

(define (word-count pages) (map-reduce wc pages + 0))
(define (make-dictionary pages) (map-reduce mw (words
```

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (sum lower upper f)
  (if (> lower upper) 0
    (+ (f lower) (sum (+ lower 1) upper f))
  ))
```

끝나는 재귀함수인지 확인하기

```
(define (sigma lower upper)
  (lambda (f)
    (define (loop n)
      (if (> n upper) 0
        (+ (f n) (loop (+ n 1)))))
    (loop upper)
  ))
```

끝나는 재귀함수인지 확인하기

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon, c) &= \emptyset \\
f(c', c) &= \emptyset \quad (c \neq c') \\
f(c, c) &= \{\epsilon\} \\
f(r_1|r_2, c) &= f(r_1, c) \ \cup \ f(r_2, c) \\
f(r^\flat, c) &= \{r' r^\flat \mid r' \in f(r, c)\} \\
f(cr_2, c) &= \{r_2\} \\
f(c' r_2, c) &= \emptyset \quad (c \neq c') \\
f(\epsilon r_2, c) &= f(r_2, c) \\
f((r_{1_1} r_{1_2}) r_2, c) &= f(r_{1_1}(r_{1_2} r_2), c) \\
f((r_{1_1}|r_{1_2}) r_2, c) &= f(r_{1_1} r_2, c) \ \cup \ f(r_{1_2} r_2, c) \\
f(r_1^\flat r_2, c) &= f(r_2, c) \ \cup \ \{r' r_1^\flat r_2 \mid r' \in f(r_1, c)\}
\end{aligned}
$$

끝나는 재귀함수인지 확인하기 (Ackermann Function)

$$
\begin{array}{lcll}
f(m,n) & = & n+1 & \text{if } m = 0 \\
f(m,n) & = & f(m-1,1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\
f(m,n) & = & f(m-1,f(m,n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0
\end{array}
$$